Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Théme : Suites réelles

Répondre par Vrai ou Faux

Exercice :

A) Répondre par **Vrai** ou **Faux** en justifiant la réponse.

1°) La suite (t_n) définie sur *IN* par $t_n = 1 - \frac{1}{n}$ est une suite croissante.

2°) La suite (w_n) définie sur *IN* par $w_n = -2^n$ n'admet pas de limite.

3°) La suite (s_n) définie sur *IN* par $s_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ est majorée par 2.

B) Le tableau ci-contre est le tableau de variation de la fonction *f* définie sur $[-1,+\infty[$ pat

$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{(x+2)^2+3} - 2$.

x	-1	$+\infty$
f		↗

1°) Recopier et compléter le tableau.

2°) Soit (u_n) la suite définie sur *IN* par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$$

Montrer, par récurrence que $-1 \le u_n \le 3$ pour tout entier naturel *n*.

3°) Soit la suite (v_n) définie sur *IN* par : $v_n = (u_n+2)^2 - 1$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de *n*, calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

A)

1°) $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $t_{n+1} - t_n = 1 - \frac{1}{n+1} - 1 + \frac{1}{n}$

$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$= \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$

Donc (t_n) est croissante **Vrai**

2°) $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -2^n = \lim\limits_{n\to+\infty} -(2^n) = -\infty$ ($2^n \to +\infty$)

Faux

car $2 > 1$

3) $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$

$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}$

$= 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

or $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leqslant 1$

$\Rightarrow 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \leqslant 2$

$\Rightarrow S_n \leqslant 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Ainsi (S_n) est majorée par 2. Vrai

B) 1) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{(x+2)^2+3} - 2$

•) $f(-1) = \frac{1}{2}\sqrt{4} - 2 = -1$

•) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}\sqrt{(x+2)^2+3} - 2 = +\infty$ ($(x+2)^2 \to +\infty$)

x	-1	$+\infty$
f	-1 ↗	$+\infty$

2°) pour $n=0$ $\quad -1 \leqslant u_0 = 0 \leqslant 3$ (vraie)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $-1 \leqslant u_n \leqslant 3$

et montrons que $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.

• On a $-1 \leqslant u_n \leqslant 3$ $\quad (u_{n+1} = f(u_n))$

or f est croissante sur $[-1,3]$

Donc $f(-1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(3)$

$\Rightarrow -1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{28} - 2 \simeq 0,64 < 3$

Conclusion: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leqslant u_n \leqslant 3}$

3) a) $v_{n+1} = (u_{n+1}+2)^2 - 1$

$= (f(u_n)+2)^2 - 1$

$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{(u_n+2)^2+3} - 2 + 2\right)^2 - 1$

$= \frac{1}{4}\left((u_n+2)^2+3\right) - 1$

$= \frac{1}{4}\left((u_n+2)^2+3-4\right)$

$= \frac{1}{4}\left((u_n+2)^2-1\right)$

$= \frac{1}{4} v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0 \times q^n$

Or $v_0 = (u_0+2)^2 - 1 = 3$

$q = \frac{1}{4}$

Donc $v_n = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

.) On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = (u_n+2)^2 - 1$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$\Leftrightarrow (u_n+2)^2 = v_n + 1$

$\Leftrightarrow |u_n+2| = \sqrt{v_n+2}$

On a $-1 \leqslant u_n \leqslant 3 \Rightarrow 1 \leqslant u_n + 2 \leqslant 5$

Donc $u_{n+2} = \sqrt{v_n + 1}$

$\Rightarrow u_n = \sqrt{v_n + 1} - 2$

$\Rightarrow \boxed{u_n = \sqrt{3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1} - 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1} - 2 = \boxed{-1}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^n \to 0$ car $\frac{1}{4} < 1$